**Óravázlat**

A sorbanállási feladatok olyan rendszerek működését vizsgálják, amelyekben valamilyen igény kielégítésére egyedek érkeznek be véletlenszerűen. Ugyanakkor a kiszolgálási időtartamok hossza is valószínűségi változó. Ezért időről-időre előfordulhatnak kialakuló várakozó sorok, amelyek során az egyedek oldaláról idő és pénzveszteség áll elő. Hosszú várakozási idők keletkezése a kiszolgálónak sem lehet érdeke. A feladat tehát a kiszolgáló berendezések számának meghatározása úgy, hogy a rendszer működésének egészére vonatkozó gazdaságosság a legfőbb cél.

A többcsatornás rendszerek vizsgálatánál ugyanazokat a jelöléseket és egyszerűsítő feltételeket alkalmazzuk mint az egycsatornás rendszerek esetében

**Jelölések:**

*v* – várakozók száma egy adott időpontban

*n* – a rendszerben tartózkodók száma egy adott időpontban

- annak a valószínűsége, hogy egy *t* időpontban pontosan *n* egység tartózkodjon a rendszerben

- a sorbanállók számának várható értéke egy adott időpontban

- a rendszerben tartózkodók számának várható értéke egy adott időpontban

- sorbanállással (várakozással) eltöltött idő hosszának várható értéke

- a rendszerben eltöltött idő (várakozás + kiszolgálás) hosszának várható értéke

**Egyszerűsítő feltételek**

A sorbanállás rendje: szigorú prioritási elv (First Came First Served)

A beérkezések rendje: Poisson folyamat

- időegység alatt beérkezők száma Poisson-eloszlást követ

- stacioneritás (időközönként egyenlő számú beérkezés)

- ritkasági feltétel (egyszerre csak egy egyed léphet be)

A kiszolgálások rendje: exponenciális eloszlást követ a kiszolgálások időtartama

**Képletek:**

Általános képletek:

,  (Little-formulák); ,

Többcsatornás (S) rendszer speciális képletei:

Annak a valószínűsége, hogy a rendszerben nincs kliens

.

Annak a valószínűsége, hogy a rendszerben éppen *n* kliens tartózkodik

A sorukra várakozók számának várható értéke

Az összes többi mutató értékét ki lehet számolni a megadott három képlet, illetve az általános képletek segítségével.

**Mintapélda**

Átlagosan 90 látogató érkezik óránként egy hotel recepciójára (a beérkezési idők exponenciálisak) és várakozik szobafoglalásra. Jelenleg 5 portaszolgálatos van és a vendégek egyetlen sorba állnak be az egyik ügyintéző szabaddá válásáig. A portások átlagosan 3 perc alatt szolgálják ki a vendéget (exponenciális eloszlással). A dolgozók 10 dollárt keresnek óránként, és a hotel úgy számol, hogy a vendégek várakozása óránként 20 dollárba kerül.

1. Mennyien várakoznak átlagosan, hogy sorra kerüljenek?
2. Mennyi a várakozással eltöltött idő hossza átlagosan?
3. Számítsa ki a rendszer várható óránkénti költségét.
4. Mennyivel változik a várakozási idő hossza, ha még egy hatodik portás is szolgálatba lép?
5. Hogyan változik a várható óránkénti költség 6 ügyintéző esetében?

**Megoldás**

A feladatot tekinthetjük sorbanállási problémának, ahol a paraméterek:

S = 5, λ = 90 / ó, μ = 60/3 = 20 / ó.

A forgalom intenzitása . Mivel a kapott érték kisebb 5-nél, ezért alkalmazhatjuk képleteinket a kérdések megválaszolásához.

a) 

Tehát átlagosan közel **7-en várakoznak** a recepciónál arra, hogy kiszolgálják őket.

b)



Tehát egy látogató átlagosan **4,6** **perc**et fog várakozni a sorban.

c)

Recepciósok bére: 5∙10 = 50 dollár.

Vendégek várakozásának költsége: 90∙0,077∙20 = 138,6 dollár.

A rendszer várható óránkénti összköltsége: 50 + 138,6 = **188,6 dollár**.

d)

A beérkezési ráta és a kiszolgálási ráta változatlanok maradnak, viszont a csatornák száma 5-ről 6-ra növekszik, azaz S = 6.



Tehát egyetlen egy új portás belépésével a látogatók várakozási idejének várható értéke nagymértékben csökken 4,61 percről 0,84 percre, azaz 3,77 perccel. Ez várhatóan nagy megtakarítást fog jelenteni a sorbanálláshoz köthető költségekben.

e)

Recepciósok bére: 6∙10 = 60 dollár.

Vendégek várakozásának költsége: 90∙0,014∙20 = 25,2 dollár.

A rendszer várható óránkénti összköltsége: 60 + 25,2 = **85,2 dollár**.

Egy újabb portás beléptetésével a munkabér költségek nőttek, de a látványosan lecsökkenő várakozó sor hossza miatti költségcsökkenés miatt a szállodának több mint **100 dolláros megtakarítás**a lesz.

**Esettanulmány**

Egy üzemben sok szerszámot a szerelőcsarnokban lévő nagy szerszámraktárból kell az adott munkához kivenni. Ennek következményeként a raktárablakok előtt sorba állnak a munkások. Hány raktáros kell a szerszámok szétosztására, hogy a munkások idővesztesége és a raktári alkalmazottak kihasználatlan ideje minimális legyen?

Adatok a beérkezésekről (100-szor 10 perc) és számítási eredmények:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Beérkezések  száma  / 10 perc | Megfigyelt  gyakoriság  % | Beérkezések  számának  átlaga | Elméleti  Poisson  gyakoriság |
| 5 | 1 | 0,05 | 0,1 |
| 6 | 0 | 0 | 0,3 |
| 7 | 1 | 0,07 | 0,7 |
| 8 | 2 | 0,16 | 1,5 |
| 9 | 1 | 0,09 | 2,5 |
| 10 | 3 | 0,3 | 3,9 |
| 11 | 5 | 0,55 | 5,6 |
| 12 | 6 | 0,72 | 7,3 |
| 13 | 9 | 1,17 | 8,7 |
| 14 | 10 | 1,4 | 9,7 |
| 15 | 11 | 1,65 | 10,1 |
| 16 | 12 | 1,92 | 9,9 |
| 17 | 8 | 1,36 | 9,1 |
| 18 | 9 | 1,62 | 7,9 |
| 19 | 7 | 1,33 | 6,5 |
| 20 | 5 | 1 | 5,0 |
| 21 | 4 | 0,84 | 3,7 |
| 22 | 3 | 0,66 | 2,7 |
| 23 | 1 | 0,23 | 1,8 |
| 24 | 1 | 0,24 | 1,2 |
| 25 | 1 | 0,25 | 0,7 |
| Átlag/10 perc: 15,61 |  |  |  |
| KORRELÁCIÓ: | 0,974802 | | |

Száz 10 perces periódus adatait feljegyezve kapjuk a második oszlop gyakoriságait. Ezután kiszámítjuk a beérkezések átlagos számát 10 perces időszakonként. Ez az átlag: 15,61. Majd megpróbáljuk felmérésünk eredményeit egy használatos és kényelmes elméleti valószínűségi eloszláshoz illeszteni. A modellnek megfelelő Poisson – eloszlást nagyon jó közelítéssel érvényesnek tekinthetjük.

Adatok a kiszolgálásról (1000 időtartam) és számítási eredmények:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Kiszolgálás  időtartama  mp | Megfigyelt  gyakoriság  % | Megfigyelt  Kumulált gyakoriság  % | Kiszolgálási  idő  átlaga | Elméleti  exponenciális  gyakoriság |
| 0 | 18,7 | 18,7 | 0,0 | 0,0 |
| 15 | 16,1 | 34,8 | 2,4 | 22,5 |
| 30 | 14 | 48,8 | 4,2 | 39,9 |
| 45 | 10,4 | 59,2 | 4,7 | 53,4 |
| 60 | 7,8 | 67 | 4,7 | 63,9 |
| 75 | 6,9 | 73,9 | 5,2 | 72,0 |
| 90 | 5,1 | 79 | 4,6 | 78,3 |
| 105 | 4,7 | 83,7 | 4,9 | 83,2 |
| 120 | 3,8 | 87,5 | 4,6 | 87,0 |
| 135 | 3 | 90,5 | 4,1 | 89,9 |
| 150 | 1,6 | 92,1 | 2,4 | 92,2 |
| 165 | 1,7 | 93,8 | 2,8 | 93,9 |
| 180 | 1,1 | 94,9 | 2,0 | 95,3 |
| 195 | 0,7 | 95,6 | 1,4 | 96,4 |
| 210 | 0,9 | 96,5 | 1,9 | 97,2 |
| 225 | 0,9 | 97,4 | 2,0 | 97,8 |
| 240 | 0,5 | 97,9 | 1,2 | 98,3 |
| 255 | 0,4 | 98,3 | 1,0 | 98,7 |
| 270 | 0,4 | 98,7 | 1,1 | 99,0 |
| 285 | 0,3 | 99 | 0,9 | 99,2 |
| 300 | 1 | 100 | 3,0 | 99,4 |
| Átlag (mp): 58,9 | |  | | |
| KORRELÁCIÓ: | | 0,99883945 | | |

Ezer kiszolgálási időt jegyeztünk fel negyedperces időintervallumokat véve alapul. A gyakoriságok táblázatának segítségével a kiszolgálás átlagos hosszára 58,9 másodpercet kapunk. A modellnek megfelelő exponenciális-eloszlást nagyon jó közelítéssel érvényesnek tekinthetjük.

A következőkben kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy nincs ügyfél a rendszerben, a sorbanállással eltöltött idő hosszát, a kiszolgálók tétlenséggel eltöltött idejét, illetve az elvesztegetett összidőt. Egy raktárossal a rendszer nem tudna hatékonyan működni, hiszen, ha λ értéke meghaladja μ értékét, akkor a várakozó sor egyre csak növekszik, a beérkezés gyorsabb a kiszolgálásnál. Egynél több raktáros esetében ez a probléma nem jelentkezik, ezért összehasonlíthatjuk az S = 2, 3, 4,… esetekben kapott összidőket.

A képletek segítségével kapott eredményeket kiolvashatjuk az alábbi Excel táblázatból.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| λ= | 15,61 | 1,561 | μ= | 58,9 | 0,98 |  | ψ= λ/μ | =1,59 |  |
|  | / 10 perc | / perc |  | mp | perc |  |  |  |  |
|  |  |  |  | | |  | | |  |
| S= | p0= | M(ts)= | Rakt. üres idő (perc): | | | Munk. üres idő (perc): | | | Összidő (perc): |
| 2 | 0,11 | 1,75 | 197 | | | 1312 | | | 1508 |
| 3 | 0,19 | 0,20 | 677 | | | 146 | | | 823 |
| 4 | 0,20 | 0,04 | 1157 | | | 28 | | | 1185 |
| 5 | 0,20 | 0,01 | 1637 | | | 6 | | | 1642 |

A négy különböző eset végeredményét összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy három raktáros alkalmazása esetén kapjuk a feleslegesen elvesztegetett összidő minimumát. Utána jól láthatóan, egyébként logikusan is, egyre növekszik ez az összeg, tehát felesleges a további esetek figyelembe vétele.

A feladatot lehetne általánosítani azáltal, hogy a munkások, illetve a raktárosok munkabérét differenciáltan adjuk meg. Ezáltal az időveszteséget forintosítani lehet. Az optimális megoldás ilyenkor természetesen változhat az adott órabérek függvényében.

